Электронные токи ионно-звукового солитона

С. В. Кузнецов
Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр.2, Москва 125412, Россия

E-mail: svk@ihed.ras.ru

Статья поступила в редакцию 7 марта 2024 г.

Аннотация. В кинетическом подходе для описания движения электронной компоненты неизотермической плазмы и при использовании уравнений гидродинамики для описания движения ионов в одномерной геометрии показано, что наряду с движением ионов и потоком захваченных электронов в направлении распространения ионно-звукового солитона в плазме также существует ток пролетных электронов, который обратен по знаку к току захваченных электронов. Установлено, что во всем диапазоне скоростей ионно-звукового солитона эти токи сопоставимы по величине.
https://doi.org/10.33849/2024101

1. ВВЕДЕНИЕ

Плазменное образование в виде нелинейной уединенной ионно-звуковой волны в неизотермической плазме впервые было предсказано в работе [1]. Следующий шаг в развитии исследований по этой тематике был сделан в работе [2], в которой было показано, что уединенные ионно-звуковые волны представляют собой особый тип установившихся нелинейных волн, в которых возрастание скорости участков их профиля вследствие нелинейных эффектов компенсируется уменьшением их скорости из-за дисперсии.

В работах [1, 2], а также во многих последующих, и в учебных пособиях (см. напр., [3–7]) для демонстрации в одномерной геометрии возможности существования ионно-звукового солитона в неизотермической плазме зависимость плотности ионов от скалярного потенциала электрического поля солитона определялась из гидродинамических уравнений, описывающих их движение, а зависимость плотности электронов от потенциала определялась с помощью распределения Больцмана. Такой подход объяснялся тем, что в неизотермической плазме фазовая скорость ионно-звуковой волны много меньше тепловой скорости электронов, но много больше тепловой скорости ионов. Подстановка этих зависимостей в одномерное уравнение Пуассона определяла исходное уравнение для скалярного потенциала продольного электрического поля, описывающее нелинейную ионно-звуковую волну и, в частности, солитон, как ее вырожденный случай.

Другой подход на основе кинетического описания движения электронов был продемонстрирован в работе [8]. В данном исследовании были выявлены новые особенности солитонов в разреженной бесстолкновительной неизотермической плазме. Оказалось, что в кинетическом описании наряду с электронами, свободно пролетающими через область солитона, существуют и такие электроны, которые совершают финитное движение в потенциальной яме солитона. Эти электроны, которых еще называют захваченными, существенно влияют на форму солитона и его характеристики, поскольку их функция распределения по энергии в потенциальной яме определяет зависимость плотности электронной компоненты плазмы от потенциала солитона.

Вопрос о характере распределения захваченных электронов по энергии в потенциальной яме солитона в значительной степени является неопределенным. Из работы [9] известно, что для электростатических продольных волн с захваченными электронами вид распределения электронов, находящихся в потенциальной яме, может быть выбран достаточно произвольно. Поэтому на практике в каждой конкретной работе по ионно-звуковым солитонам с захваченными электронами функция их распределения по энергии или скоростям определялся согласно тем или иным соображениям касательно процесса возбуждения ионно-звуковой волны. Например, в работе [8] функция распределения электронов по скоростям определена из условия адиабатического захвата электронов в потенциальную яму солитона, которая считается неподвижной ввиду того, что тепловая скорость электронов много больше скорости распространения солитона в плазме. В результате этого исследования была определена такая зависимость от потенциала плотности электронов, которая отличается от выражения, получаемого при использовании для электронов распределения Больцмана.

Такой результат указывает на то, что модель, используемая для описания электронной компоненты бесстолкновительной неизотермической плазмы, существенно определяет характер ее движения в поле солитона. В связи с этим возникает вопрос о правомерности изначально принятого допущения, что движение солитона столь мало влияет на функцию распределения по скоростям электронов, что им можно пренебречь. Задачей настоящей работы является устранение данного недочета с целью получения более точного представления о токах заряженных частиц в плазме, сопровождающих движение в ней ионно-звукового солитона.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В проводимом исследовании в качестве среды, в которой распространяется ионно-звуковой солитон, рассматривается бесстолкновительная неизотермическая плазма, электронная компонента которой характеризуется температурой T_e, а ионы плазмы считаются холодными. Для описания движения электронной компоненты плазмы будем использовать уравнение Власова. Движение ионной компоненты плазмы опишем в гидродинамическом приближении.

Рассмотрим задачу о распространении солитона в одномерной геометрии. Для решения задачи удобнее перейти в систему координат, в которой солитон неподвижен. В соответствии с этим в данной системе координат на неподвижный солитон будет набегать поток ионов. Для определенности выберем направление движения ионов вдоль оси z справа налево, при этом на бесконечности вдали от солитона скорость потока ионов $-V$, где $V > 0$, их плотность n_0.

Как известно из [5–7], ионно-звуковой солитон представляет собой такое плазменное образование, в котором потенциал его продольного электрического поля всюду положительный. Поэтому для электронов плазмы ионно-звуковой солитон является потенциальной ямой. Электроны, приходящие в область солитона из бесконечности, называются пролетными, потому что они находятся в области, занимаемой солитоном, конечное время. Пролетные электроны вдали от солитона в выбранной системе отсчета имеют максвелловское распредение по скоростям, сдвинутое на скорость V:

$$f_e = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T_e/m_e}} \exp\left\{-\frac{m_e\left(u_e+V\right)^2}{2T_e}\right\}, \tag{1}$$

где m_e — масса электрона, u_e — скорость электронов в волновой системе отсчета, в которой солитон неподвижен, n_0 и T_e — их концентрация и температура в энергетических единицах. Но, в отличие от ионов, электроны будут проходить область солитона, двигаясь как справа налево, так и наоборот, поэтому выражение (1) описывает распределение электронов по скоростям с обеих сторон солитона вдали от него. Уравнение Власова для функции распределения электронной компоненты плазмы в волновой системе отсчета имеет вид:

$$u_e\frac{\partial f_e}{\partial \xi} + \frac{|e|}{m_e}\frac{d\phi}{d\xi}\frac{\partial f_e}{\partial u_e} = 0, \tag{2}$$

где $|e|$ — заряд электрона, ϕ — скалярный потенциал электрического поля солитона, $\xi = z - Vt$ — пространственная координата в волновой системе отчета.

Решая уравнение Власова с учетом условия (1), для пролетных электронов в области солитона получаем функцию распределения по скоростям в виде:

$$f_e = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T_e/m_e}} \exp\left\{-\frac{m_e\left(-\sqrt{u_e^2-\frac{2|e|\phi}{m_e}}+V\right)^2}{2T_e}\right\} \tag{3}$$

при условии

$$u_e \le -\sqrt{\frac{2\,|e|\,\phi}{m_e}} \tag{4}$$

для электронов, пролетающих область солитона справа налево, и

$$f_e = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T_e/m_e}} \exp\left\{-\frac{m_e\left(\sqrt{u_e^2-\frac{2|e|\phi}{m_e}}+V\right)^2}{2T_e}\right\} \tag{5}$$

при условии

$$u_e \ge \sqrt{\frac{2\,|e|\,\phi}{m_e}} \tag{6}$$

для электронов, пролетающих область солитона слева направо.

Далее, интегрируя полученное распределение (3), (5), по скорости электронов, можно записать концентрацию пролетных электронов $n_{e,f}$ в области солитона в зависимости от потенциала в виде:

$$n_{e,f} = n_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\mathrm{x}^2+\hat\beta^2}{2}\right\}\mathrm{ch}(\hat\beta \mathrm{x})\frac{\mathrm{x}d\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+(2\,|\mathrm{e}|\,\phi)/\mathrm{T_e}}}, \tag{7}$$

где $\hat\beta = V\sqrt{\frac{m_e}{T_e}}$.

Уравнения, описывающие движение ионов в гидродинамическом приближении, имеют вид:

$$\frac{d(n_i u_i)}{d\xi} = 0, \tag{8}$$

$$m_i u_i\frac{d(u_i)}{d\xi} = -\,|e|\,\frac{d\phi}{d\xi}, \tag{9}$$

где n_i — концентрация ионов и принято, что ионы с массой m_i имеют заряд $|e|$.

Интегрируя эти уравнения с учетом условий на бесконечности, получаем выражение для концентрации ионов в области солитона в зависимости от потенциала в виде:

$$n_i = \frac{n_0 V}{\sqrt{V^2-(2\,|e|\,\phi)/m_i}}, \tag{10}$$

где предполагалось, что вне области солитона плазма квазинейтральна.

3. УРАВНЕНИЕ СОЛИТОНА И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из [5–7] известно, что ионно-звуковой солитон представляет собой локализованное в пространстве образование, перемещающееся с постоянной скоростью по плазме в виде возмущения концентрации заряженных частиц компонент плазмы и продольного электрического поля. Поэтому в общем виде солитон описывается уравнением Пуассона

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = -4\pi\sum_\alpha \rho_\alpha(\phi), \tag{11}$$

где ρ_α — плотность заряда частиц сорта α, составляющих плазму. Конкретно в данном случае под сортами частиц подразумеваются ионы и электроны. Последние разделяются на две группы — пролетные, концентрация которых определяется соотношением (7), и захваченные, которые совершают финитное движение в потенциальной яме солитона.

Как уже упоминалось выше, функция распределения захваченных электронов в потенциальной яме определяется процессом образования солитона, который требует отдельного изучения. Например, в работе [8] рассматривался процесс захвата электронов при медленном адиабатическом включении потенциального поля солитона; при этом скоростью перемещения солитона по плазме пренебрегалось. Было установлено, что в потенциальной яме формируется такое симметричное платообразное распределение по скорости захваченных электронов, которое обеспечивает непрерывность функции распределения электронов по скоростям при переходе из области захваченных электронов к пролетным.

В настоящей работе процесс захвата электронов, с учетом того, что, в отличие от работы [8], потенциальная яма движется, не рассматривается. Вид функции распределения захваченных электронов в яме движущегося солитона постулируется на основе работы [9], в которой показано, что допустим достаточно широкий произвол в выборе способов заполнения электронами потенциальной ямы, обеспечивающих существование продольных потенциальных волн в плазме. Конкретно в качестве функции распределения по скоростям захваченных электронов избрано обобщение результата работы [8]

$$f_e = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T_e/m_e}} \exp\left\{-\frac{m_e V^2}{2T_e}\right\}, \tag{12}$$

которое в диапазоне скоростей $|u_e| \leq \sqrt{2\,|e|\,\phi/m_e}$ обеспечивает такое дополнение к функции распределения пролетных электронов, что эта функция всюду становится непрерывной.

Таким образом, в дальнейшем предполагается, что в потенциальной яме солитона содержатся захваченные электроны, которые совершают симметричные осцилляции относительно центра ямы солитона, и зависимость их плотности от скалярного потенциала представляется формулой:

$$n_{e,tr} = n_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\hat{\beta}^2}{2}\right) \sqrt{\frac{|e|\,\phi}{T_e}} \tag{13}$$

Подставляя полученные выражения (7), (10), (13) в уравнение Пуассона в безразмерном виде

$$\frac{d^2\hat{\phi}}{d\hat{\xi}^2} = \sum_{\alpha} \tilde{n}_\alpha, \tag{14}$$

где $\hat{\xi} = \xi/r_{De}$, $r_{De} = \sqrt{T_e\big/(4\pi e^2 n_0)}$ — дебаевский радиус, $\hat{\phi} = |e\phi|/T_e$, концентрации всех частиц $\tilde{n}_\alpha$ нормированы на n_0 и учитываются с знаком, противоположным знаку частиц сорта α, и интегрируя, получаем уравнение, описывающее нелинейное движение бесстолкновительной неизотермической плазмы:

$$\frac{1}{2}\left(d\hat{\phi}\Big/d\hat{\xi}\right)^2 + U(\hat{\phi}) = 0 \tag{15}$$

Константа интегрирования в уравнении (15) определена из условий на бесконечности, где потенциал электрического поля солитона и его производная обращаются в нуль. В результате получаем следующее выражение для функции $U(\hat{\phi})$:

$$\begin{aligned} &U(\hat{\phi}) = \\ &\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\tfrac{\mathrm{x}^2+\gamma\hat{\mathrm{V}}^2}{2}\right\} \mathrm{ch}(\sqrt{\gamma}\hat{\mathrm{V}}\mathrm{x})\mathrm{x}(\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\hat{\phi}})\mathrm{dx} \\ &+\hat{V}^2\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{2\hat{\phi}}{\hat{V}^2}}\right) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \exp\left(-\tfrac{\gamma\hat{V}^2}{2}\right) \tfrac{(2\hat{\phi})^{1.5}}{3}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\tilde{V} = V/V_{s,0}$, $V_{s,0} = \sqrt{T_e/m_i}$ — линейная скорость ионно-звуковой волны в модели плазмы, в которой ионы считаются холодными, а электроны имеют по энергии распределение Больцмана. Здесь также использовано, что величина $\hat{\beta}$ не является произвольной, так как определяется формулой $\hat{\beta} = \sqrt{\gamma}\tilde{V}$, где $\gamma = m_e/m_i$.

Полученное выражение для функции $U(\hat{\phi})$ отличается от соответствующего выражения, полученного в рамках работы [8], наличием членов, содержащих малый параметр $\gamma \approx 1/1800$, если плазма является ионизованным водородом. Уравнение (15) и его решение обычно для наглядности интерпретируются в [2, 10, 11] как нерелятивистское движение по координате $\hat{\phi}$ частицы единичной массы в потенциальной яме. Функция $U(\hat{\phi})$ в данном случае исполняет роль потенциальной энергии частицы. Частица выходит из положения $\hat{\phi} = 0$ и движется к правому краю ямы, который определяет максимальную амплитуду потенциала солитона при выбранном фиксированном значении $\tilde{V}$. Чтобы указанное движение совершалось, необходимо, чтобы функция $U(\hat{\phi})$ обладала определенными свойствами. А именно, необходимо, чтобы выполнялось $dU\Big/d\hat{\phi} < 0$ при $\hat{\phi} \to +0$ и $U(\hat{\phi}_{\max}) = 0$ при некотором значении $\hat{\phi}_{\max}$, которое соответствует максимальной амплитуде солитона. Разлагая функцию $U(\hat{\phi})$ по параметру $\hat{\phi} \ll 1$, получаем условие:

$$1 - \frac{1}{\tilde{V}^2} + i\sqrt{\gamma}\tilde{V}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{erf}\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{\gamma}\tilde{\mathrm{V}}}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(-\frac{\gamma\tilde{\mathrm{V}}^2}{2}\right) \geq 0, \tag{17}$$

при котором обеспечивается наличие первого свойства функции $U(\hat{\phi})$. Соотношение (17) ограничивает снизу допустимый диапазон значений безразмерной скорости солитона $\tilde{V}$. В первом порядке по величине $\gamma \ll 1$ получаем $\tilde{V}_{\min} \approx 1 + \gamma/2$. Малая поправка, пропорциональная γ, возникла из-за того, что при определении функции распределения электронов по скоростям учитывалось движение солитона. В пределе $\gamma \to 0$ эта формула переходит в известное выражение [1–8], полученное для случая, когда при захвате электронов солитон считался неподвижным.

Максимальное значение безразмерной скорости солитона $\tilde{V}_{\max}$ реализуется при достижении амплитудой солитона такого значения, при котором происходит опрокидывание ионной компоненты плазмы, проходящей через область солитона, являющейся для нее потенциальным барьером. Условие опрокидывания $2\hat{\phi}_{\max}\hat{V}^2_{\max} = 1$ возникает из формулы (10) и связывает максимально возможные значения потенциала ионно-

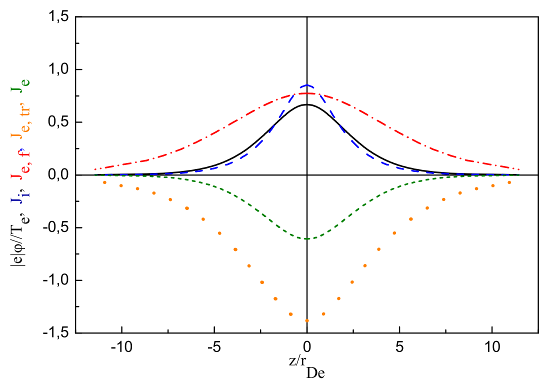

Рисунок 1. Профиль солитона $|e|\,\phi/T_e$ (сплошная толстая кривая), распределение в нем ионного тока J_i (длинный пунктир), токов пролетных $J_{e,f}$ (штрих-пунктирная кривая) и захваченных $J_{e,tr}$ (точечная кривая) электронов и полного электронного тока J_e (короткий пунктир), нормированных на $|e|\,n_0 V_{s,0}$, в лабораторной системе координат при значении скорости солитона $\tilde{V} = 1.5$.

звукового солитона и его максимальную скорость распространения по плазме. Подставляя это соотношение в выражение для потенциальной энергии, можно из условия $U(\hat{\phi}_{\max}) = 0$ численно определить предельные значения потенциала и скорости ионно-звукового солитона. Проведенный расчет показывает, что учет движения солитона слабо влияет на значения границ диапазона скорости солитона и его амплитуды в сопоставлении с тем случаем, когда скорость солитона не учитывается. Качественно новый результат при кинетическом подходе в исследовании ионно-звукового солитона с учетом его движения в плазме возникает при анализе электронных токов, протекающих через солитон. На рисунке 1 показаны в лабораторной системе координат электронный и ионный токи в области солитона. При этом каждой из групп захваченных или пролетных электронов соответствует свой электронный ток. Ток пролетных электронов в приближении работы [8], когда скорость солитона не учитывалась, отсутствует. Присутствие тока пролетных электронов обнаруживается только при учете движения солитона в процессе определения функции распределения электронов по скоростям. Выражение для тока пролетных электронов $J_{e,f}$ в лабораторной системе координат имеет вид:

$$J_{e,f} = |e|\,V(n_0 - n_{e,f}) = |e|\,V_{s,0} n_0\,\tilde{V}(1 - \tilde{n}_{e,f}), \qquad (18)$$

где $\tilde{n}_{e,f} = n_{e,f}/n_0$ определяется формулой (7).

Ток захваченных электронов, как и ранее, определяется скоростью солитона и их концентрацией, которая мало отличается от концентрации, получаемой в рамках работы [8], когда перемещение солитона не учитывается.

$$J_{e,tr} = -\,|e|\,V n_{e,tr} = -\,|e|\,V_{s,0} n_0\,\tilde{V}\tilde{n}_{e,tr}, \qquad (19)$$

где $\tilde{n}_{e,tr} = n_{e,tr}/n_0$ определяется формулой (13).

В работе [12], в аналогичной данному исследованию постановке, изучался ионно-звуковой солитон, в котором захваченные электроны имеют в лабораторной системе координат смещенное на скорость V распределение Максвелла с температурой, равной температуре пролетных электронов. В результате в приближении безинерционных электронов было найдено выражение для полного электронного тока в лабораторной системе координат $J_e = J_{e,f} + J_{e,tr}$, протекающего в солитоне, но выделения каждого из слагаемых отдельно и их исследования произведено не было.

Формулы (18) и (19) данного исследования дают выражения для токов пролетных и захваченных электронов раздельно и с учетом массы электронов. Полный электронный ток, определяемый с учетом этих формул, в пределе безинерционности электронов совпадает с выражением, полученным в работе [12], если заменить максвелловское распределение захваченных электронов на платообразное, как в данном исследовании.

Следует также отметить работу [13], в которой приводится оценка для тока захваченных электронов. Для получения этой оценки была использована формула работы [8] для распределения по скоростям электронов, захваченных в потенциальную яму неподвижного солитона, и предполагалось, что такое же их распределение сохраняется при перемещении потенциальной ямы в пространстве со скоростью солитона V. Данная оценка весьма близка к значению, определяемому по точной формуле $J_{e,tr}$. Однако такой подход ничего не позволяет выяснить относительно тока пролетных электронов.

Ионный ток определяется тем же выражением, как во всех работах, в которых движение электронов описывается уравнениями холодной гидродинамики [12–14]:

$$J_i = |e|\,V(n_i - n_0) = |e|\,V_{s,0} n_0 \tilde{V}(\tilde{n}_i - 1), \qquad (20)$$

где $\tilde{n}_i = n_i/n_0$ определяется формулой (10).

Физическое объяснение появления тока пролетных электронов состоит в отсутствии симметрии по скоростям в функции распределения электронов, взаимодействующих с полем солитона, перемещающегося в пространстве. Электронов, которые попадают в потенциальную яму солитона, нагоняя его, меньше, чем электронов, которых нагоняет солитон. А так как нагоняющие солитон электроны, проходя над ямой, увеличивают свою скорость, а вторые замедляются, то интегрально возникает поток электронов в направлении, противоположном направлению движения солитона. С учетом знака заряда это соответствует появлению электронного тока в направлении движения солитона.

Ток захваченных электронов всегда отрицательный, поэтому ток пролетных электронов уменьшает суммарный электронный ток. На рисунке 2 в зависимости от скорости солитона $\tilde{V}$ показано отношение тока пролетных электронов к току захваченных электронов в той точке профиля потенциала солитона, где его потенциал максимален. Из рисунка 2 следует, что во всем диапазоне скоростей ионно-звукового солитона эти токи сопоставимы по величине. Следовательно, учет

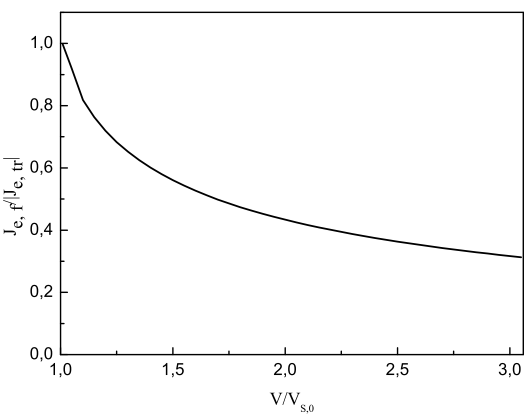

Рисунок 2. Отношение тока пролетных электронов $J_{e,f}$ к току захваченных электронов $|J_{e,tr}|$ в зависимости от скорости солитона $\tilde{V} = V/V_{s,0}$.

движения солитона в процессе определения функции распределения электронов по скоростям имеет принципиальное значение для исследования электронных токов, протекающих в области солитона. Это обстоятельство должно учитываться в экспериментальных исследованиях, например, при обработке измерений, производимых спутниками в космической плазме.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически в одномерной геометрии исследованы свойства ионно-звукового солитона в бесстолкновительной неизотермической плазме. Для описания электронной компоненты плазмы применяется кинетический подход с учетом движения солитона. Движение ионов описывается уравнениями гидродинамики.

Показано, что в данной модели кинетическое уравнение Власова для электронов и гидродинамика для ионов допускают решения в виде ионно-звукового солитона. Найдено, что главным параметром, определяющим возможность существования ионно-звукового солитона, является значение его скорости, которая должна находиться в определенном диапазоне. Солитон возможен только при сверхзвуковых скоростях распространения, причем, чем больше скорость солитона, тем большего значения достигает его амплитуда. Предел увеличения амплитуды солитона обуславливается явлением опрокидывания ионной компоненты плазмы.

Найдено, что в лабораторной системе координат, наряду с переносом захваченных электронов в направлении распространения солитона, существует поток пролетных электронов, направленный в противоположную сторону. Физическое объяснение появления тока пролетных электронов состоит в отсутствии симметрии по скоростям в функции распределения электронов, взаимодействующих с полем солитона, перемещающегося в пространстве. Электронов, которые попадают в потенциальную яму солитона, нагоняя его, меньше, чем электронов, которых нагоняет солитон. В итоге возникает интегральный поток электронов в направлении, противоположном направлению движения солитона.

Ток захваченных электронов всегда отрицательный, поэтому ток пролетных электронов уменьшает суммарный электронный ток. Показано, что во всем диапазоне скоростей, допустимых для ионно-звукового солитона, эти токи сопоставимы по величине. Следовательно, учет движения солитона имеет принципиальное значение при исследовании электронных токов, протекающих в области солитона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденов А А, Велихов Е П и Сагдеев Р З 1961 *Ядерный синтез* **1** 82—100
2. Сагдеев Р З 1964 *Вопросы теории плазмы* 4 (Москва: Атомиздат)
3. Дубинов А Е и Суслова О В 2020 *ЖЭТФ* **158** 968–977
4. Дубинов А Е 2023 *Физика плазмы* **49** 270–277
5. Ахиезер А И, Ахиезер И А, Половин Р В, Ситенко А Г и Степанов К Н 1974 *Электродинамика плазмы* (Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства “Наука”)
6. Александров А Ф и Рухадзе А А 1999 *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред* (Москва: Издательство МГУ)
7. Александров А Ф и Рухадзе А А 2002 *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред: Неравновесные среды* (Москва: Издательство МГУ)
8. Гуревич А В 1967 *ЖЭТФ* **53** 953–964
9. Bernstein I B, Greene J M and Kruskal M D 1957 *Phys. Rev.* **108** 546–550
10. Дубинов А Е и Дубинова И Д 2006 *Вопросы атомной науки и техники, Серия: Теоретическая и прикладная физика* 3
11. Dubinov A E and Dubinova I D 2005 *Journal of Plasma Physics* **71** 715—728
12. Алешин И М и Перегудов Д В 2000 *Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия.* 8–11
13. Трухачев Ф М, Васильев М М и Петров О Ф 2020 *ТВТ* **58** 563– 583
14. Dubinov A E and Lebedeva X I 2021 *Chaos, Solitons and Fractals* **152** 111391